BERECHNUNG VON SCHWANKUNGSZUSCHLÄGEN IM PRICING VON RV-VERTRÄGEN

SAV-Prüfungskolloquium am 19.11.2009

Dr. Katja Lord
Aktuar Corporate Underwriting / Corporate Pricing

Munich RE

Agenda

1. Schwankungszuschlag als Prämienbestandteil
2. Anforderungen an Risikomaß und Kapitalallokation
3. Berechnungsmethoden für den Schwankungszuschlag
4. Umsetzung in der RV-Praxis auf Einzelvertragsebene

Munich RE

SCHWANKUNGSZUSCHLAG ALS PRÄMIENBESTANDTEIL

Risikokapital (RAC = Risk Adjusted Capital)

Munich RE

Kapitalanforderung

- Schwankungen in den Resultaten einzelner Jahre
- Staatliche Solvenz-anforderungen
  - Solvency I
  - Solvency II
  - Swiss Solvency Test
- Sicherheit für Zedenten, Mitarbeiter, Aktionäre etc.

Kapitalhöhe

- Minimalstandards durch staatliche Solvenz-anforderungen
  - Solvency I:
    Beitrags- & Schadenindex
  - Solvency II / SST:
    Risikotragendes- & Zielkapital
- Risikoneigung des Unternehmens
  - ➢ Sicherheitsniveau
  - ➢ Risikomaß
- Diversifikation des Portfolios
- Gutes Rating

Angemessene Rendite (Target RoRAC)

- Technischer Ruin unab-hängig von Anfangskapital für lediglich Risikoprämie & Kostenzuschlag (vgl. Ruintheorie)
- Zusatzgewinn wegen Risiko negativer Schwankungen
- Rendite vergleichbarer Risiken (vgl. Finanzmarkttheorie)

➢ Target RoRAC (= Return on Risk Adjusted Capital)

Schwankungszuschlag / Cost of Capital

Munich RE

Kapitalallokation auf Einzelvertrag

- Schutz des Risikokapitals für jeden einzelnen Zedenten
  (Ausgleich im Kollektiv & in der Zeit)
- Kapitalallokation auf Risikoeinheiten (Branchen, Vertragsart, Märkte) bis hin zum Einzelrisiko
  - gemäß Beanspruchung und Diversifikationsbeitrag
  - zur Steuerung der effizienten Kapitalnutzung
- Target RoRAC in Summe über Schwankungszuschläge zu erzielen

Technische Prämie

Risikoprämie (inkl. Sicherheitszuschlag)
(Ultimate Expected Loss incl. ALAE)

+ Zinsrabatt
(Discounting Adjustments)

+ Kostenzuschlag
(Admin. Exp. & Deductions)

+ Schwankungszuschlag / Cost of Capital
(CoC = RAC * Target RoRAC)

= Technische Prämie

ANFORDERUNGEN AN RISIKOMASS UND KAPITALALLOKATION

Theoretische Anforderungen (I): Kohärente Risikomaße

Munich RE

Risikomaß: „Kapitalzuordnung“ $X \rightarrow c\,(X)$ zum Risiko X

Quantifikation des Risikoniveaus

- **Kohärenz:**
  - Monotonie: $c\,(X) \leq c\,(Y)$ für $X \leq Y$
    - *mehr Kapital bei höherem Risiko*
  - Subadditivität: $c\,(X + Y) \leq c\,(X) + c\,(Y)$
    - *Diversifikationseffekte*
  - Positive Homogenität: $c\,(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot c\,(X)$
    - *Skalierungsinvarianz (kein Diversifikationseffekt)*
  - Translationsinvarianz: $c\,(X + k) = c\,(X) + k$
    - *sichere Verluste ohne Einfluss auf übrige Risiken*

Theoretische Anforderungen (II): Kohärente Kapitalallokation

Kapitalallokation $(X_1, X_2, \dots, X_n) \to (c(X_1), c(X_2), \dots, c(X_n))$

Kapitalverteilung bzw. Aufteilung des Diversifikationseffekts auf Subportfolios

- **Kohärenz:**
  - Vollständigkeit: $\sum_{i=1}^{n} c(X_i) = c(\sum_{i=1}^{n} X_i)$
    - ➢ *Risikokapital des Gesamtportfolios in Summe*
  - „no undercut" (fair & stabil): $\sum_{i \in I} c(X_i) \leq c(\sum_{i \in I} X_i)$ für alle $I \subset \{1, 2, \dots, \}$
    - ➢ *Ausgleich im Kollektiv & keine Antiselektion*
  - Symmetrie: $c(X_i) = c(X_j)$, falls $X_i = X_j$
    - ➢ *Gleiches Kapital bei Gleichheit von Risiko und Portfolio-Abhängigkeit*
  - Risikolosige Allokation: $c(X_i = k) = k$
    - ➢ *Risikokapital gleich deterministischem Verlust*

Praktische Aspekte

Datenqualität

- Perfektes Modell vs. inadäquate Daten:
  - Modellierung
  - Pricing
- Sensitivität auf Datenqualität:
  - Modellierung
  - Pricing

Einfachheit

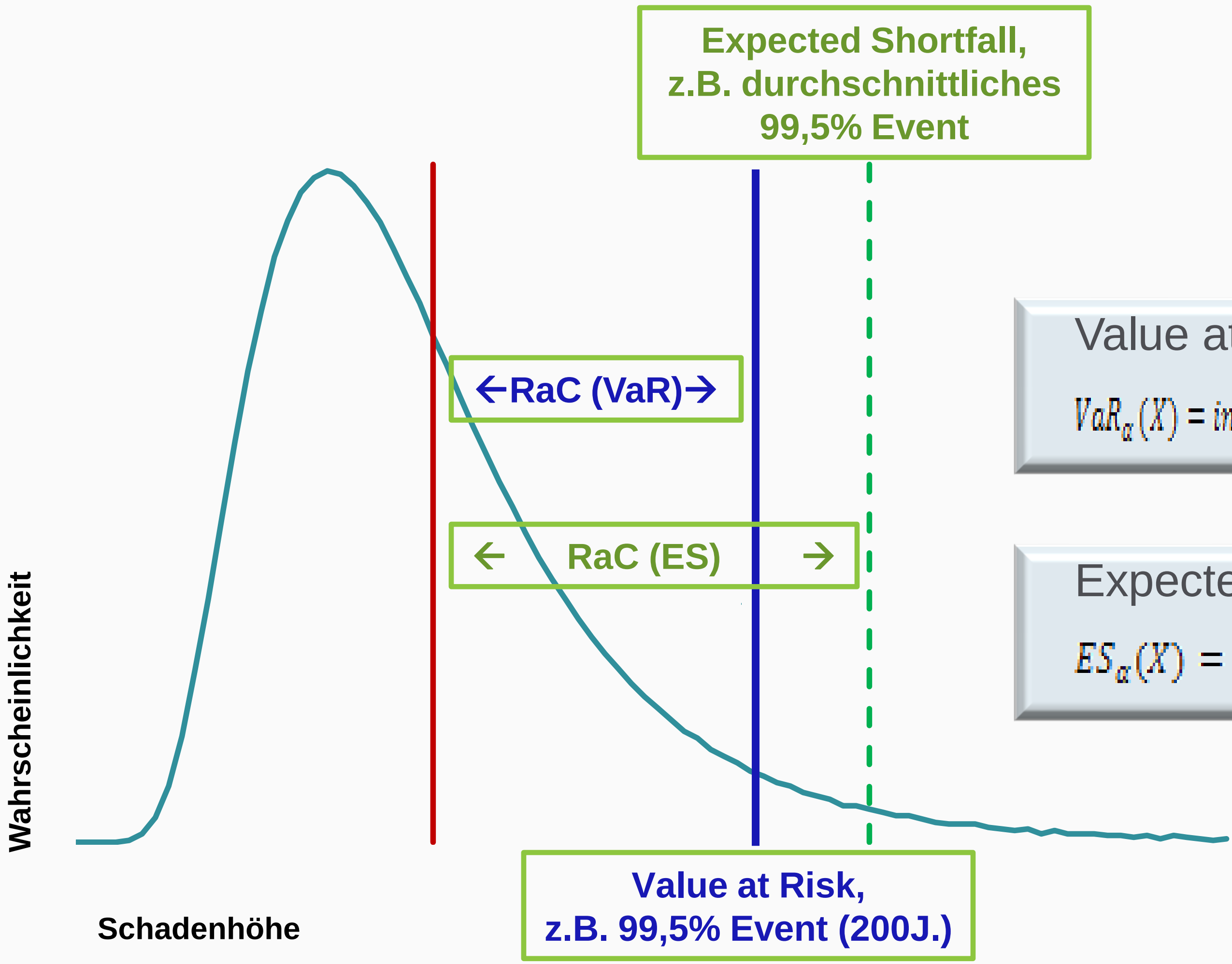
- Einfache Berechnung
- Vermittelbarkeit des Modells auch an Nicht-Aktuare
- Überprüfbarkeit der Risikoadäquanz durch Experten

Konsequenzen

- „Biasedness“ im Pricing
- Einfluss der Pricing-Resultate auf weitere Auswertungen
  - Risikomodellierung
  - Reserving
  - etc.

BERECHNUNGSMETHODEN FÜR DEN SCHWANKUNGSZUSCHLAG

Verteilungsbasierte Risikomaße (I): Value at Risk & Expected Shortfall



Value at Risk:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1 - \alpha\}$$

Expected Shortfall:

$$ES_\alpha(X) = E[X \mid X \geq VaR_\alpha]$$

Verteilungsbasierte Risikomaße (II): Eigenschaften

Value at Risk:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1 - \alpha\}$$

Subadditivität nicht gewährleistet für

- schiefe oder heavy-tailed Verteilung
- spezielle Abhängigkeitsstrukturen

Expected Shortfall:

$$ES_\alpha(X) = E[X \mid X \geq VaR_\alpha]$$

Kohärentes Risikomaß, jedoch

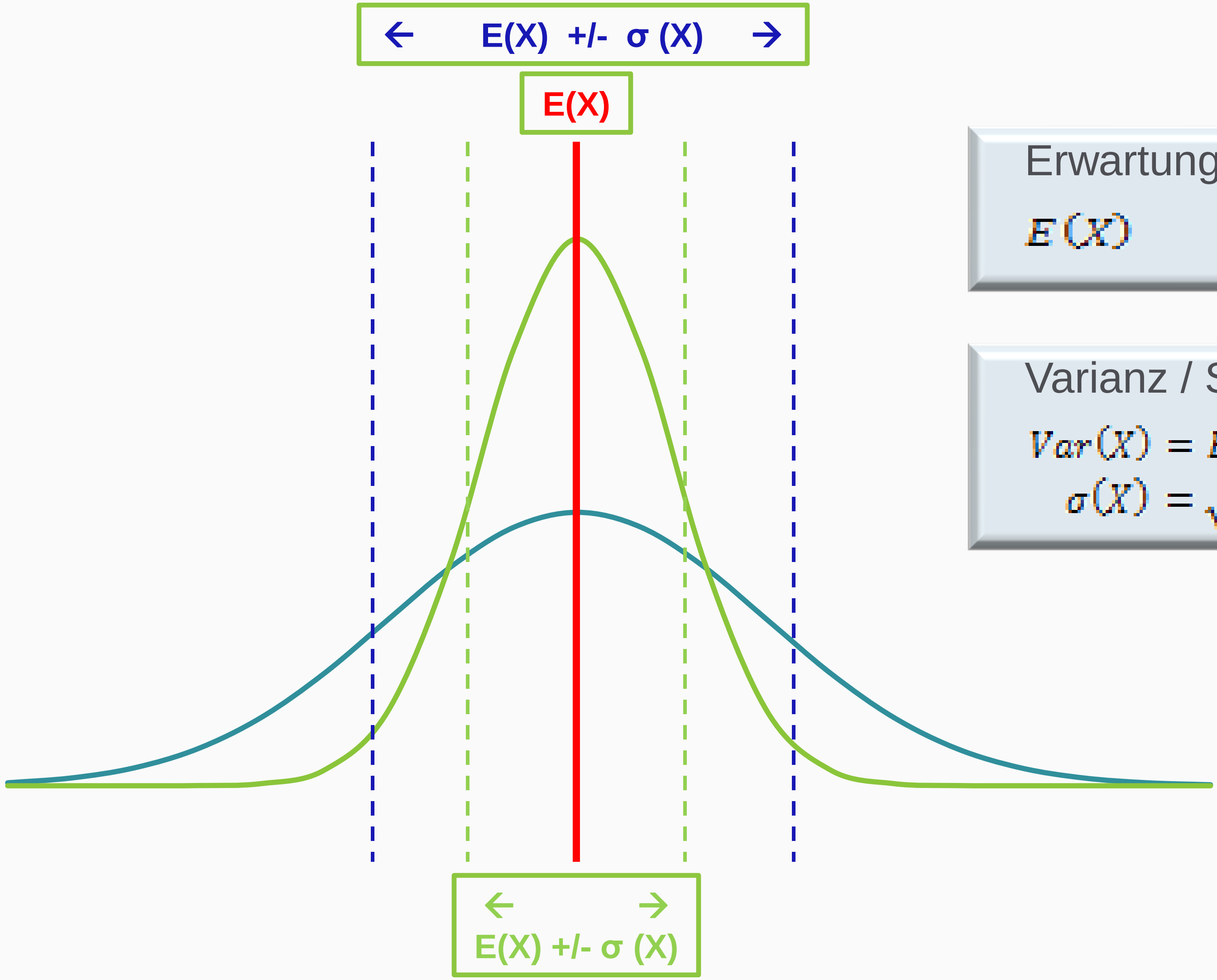
sehr hohe Sensitivität im Tail bzgl.

- Modell
- Daten

Berechnungsmethoden für den Schwankungszuschlag

Momentebasierte Risikomaße (II): Erwartungswert, Standardabweichung & Varianz

Munich RE



Erwartungswert

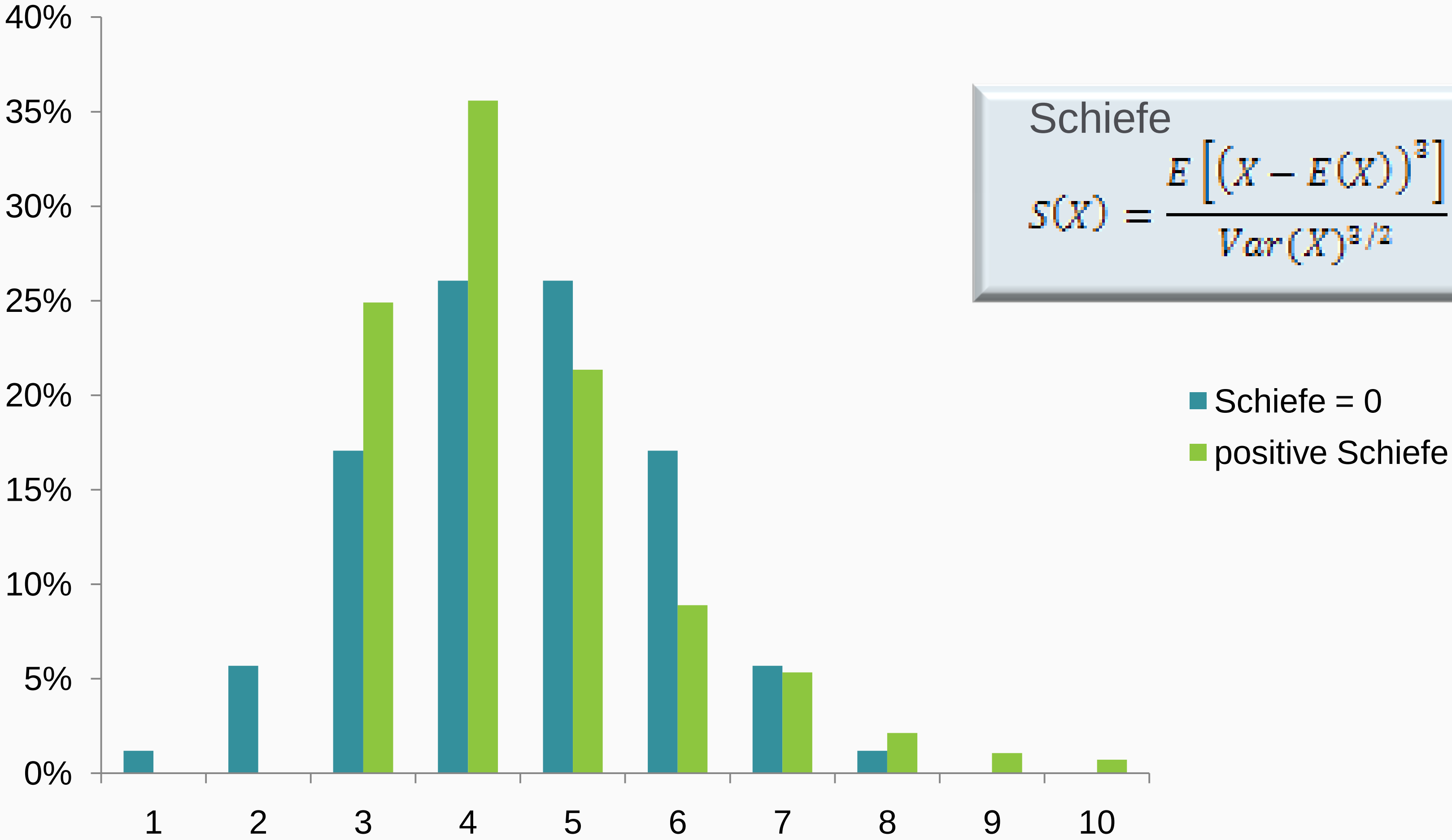
$E(X)$

Varianz / Standardabw.

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Momentebasierte Risikomaße (I): Schiefe



Schiefe

$$S(X) = \frac{E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right]}{Var(X)^{3/2}}$$

Momentebasierte Risikomaße (III): Eigenschaften

Munich RE

Erwartungswert

$$E(X)$$

Kohärentes Risikomaß, jedoch
Risikoadäquanz nur selten gegeben

Varianz / Standardabw.

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Keine kohärenten Risikomaße, jedoch
Volatilität des Risikos berücksichtigt

Anpassbar auf einseitiges Risiko statt
zweiseitige Chance-Risiko-Betrachtung

Schiefe

$$S(X) = \frac{E\left[(X - E(X))^3\right]}{Var(X)^{3/2}}$$

Kein kohärentes Risikomaß, jedoch
negatives Risiko stärker gewichtet

Allokationsverfahren (I)

Proportionale Allokation

- Allokationsfaktor $f_i = \rho(X_i) / \sum_{j=i}^{n} \rho(X_j)$ mit $\rho(X_i) = E(X_i), Var(X_i), \sigma(X_i), \dots$
- Allokation des Gesamtkapitalbedarf: $c(X_i) = f_i * c(X)$
- Im Allgemeinen nicht kohärent (vgl. risikolose Allokation & „no undercut")
- Stochastische Abhängigkeiten nicht berücksichtigt

Kovarianzbasierte Allokation

- Allokationsfaktor $f_i = Cov(X_i, X) / Var(X)$
- Allokation der Differenz aus Gesamtkapitalbedarf und Gesamtverlust:

$$c(X_i) = E(X_i) + f_i * (c(X) - E(X))$$

- Im Allgemeinen nicht kohärent (vgl. risikolose Allokation & „no undercut")

Allokationsverfahren (II)

Inkrementelle Allokation

- Kapitalzuweisung gemäß des Diversifikationsbeitrages $c(X_i) = c(X) - c(X - X_i)$
- Keine vollständige Kapitalallokation wegen Mehrfachverrechnung des Diversifikationseffektes & „no undercut“ nicht gewährleistet
- Erweiterungen:
  - Shapley-Wert (-> Berücksichtigung sämtlicher schrittweiser Beitrittsreihenfolgen)
  - Marginale Kapitalallokation

Allokation nach verallgemeinertem Expected Shortfall

- Kohärente Kapitalzuweisung per $c(X_i) = ES_\alpha(X_i|X) = E[X_i|X \geq VaR_\alpha(X)]$
- Modellierung gemeinsamer Abhängigkeiten mit Kopulas
- Konsistenz zum Kovarianzprinzip (Annahme: X_i normalverteilt)

Munich RE

UMSETZUNG IN DER RV-PRAXIS AUF EINZELVERTRAGSEBENE

Überblick & Empfehlungen: Risikomaße & Allokationsverfahren

Risikomaß	Value at Risk	Exp. Shortfall	Erwartungsw.	Standardabw.	Varianz
Monotonie	+	+	+	-	-
Subadditivität	-	+	+	+	-
Positive Homogenität	+	+	+	+	-
Translationsinvarianz	+	+	+	-	-

Allokation	Proportional	Kovarianz	Inkrementell	Verallg. ES
Vollständigkeit	+	+	-	+
"no undercut"	-	-	-	+
Symmetrie	+	+	+	+
Risikolose Allok.	-	-	+	+

RV-Gesamtsicht bis Branche / Vertragsart / Markt (blau):

verteilungsbasierte Risikomaße & Berücksichtigung stochastischer Abhängigkeiten (vgl. Swiss Solvency Test, Basel II, Solveny II)

RV-Vertragsebene (grau): momentebasierte Risikomaße & proportionale Allokation

Empfehlungen:
Momentebasierte Risikomaße für RV-Verträge

Erwartungswert

- Massengeschäft (z.B. Motor, Hausrat), falls Varianzen gemessen an Erwartungswert nicht stark variieren
- Einzelrisiken, falls keine Berechnung von Standardabweichung bzw. Varianz erfolgen kann

Standardabweichung, Varianz, Schiefe (wegen Risikoadäquanz)

- Standardabweichung bei vollständiger Korrelation
- Varianz für den unkorrelierten Fall (d.h. nicht-linear Abhängigkeit im RV-Anteil)

Rate on Line

- Hohe (Cat-)Layer (vgl. Approximation der Standardabweichung bei Poisson-Frequenzverteilung)

Integration über infinitesimale Layer (z.B. infinitesimales Rate on Line-Prinzip)

  ➢ Berücksichtigung positiv korrelierter Sub-Layer (vgl. „no undercut“)

Kombination von momentebasierten Risikomaßen

  ➢ Basis, Groß- und Cat-Schäden

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT

DR. KATJA LORD

Literatur

Munich RE

- Antal, Vorlesung „Quantitative Methods in Reinsurance“, 2003
- Basel Committee on Banking Super vision, An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, 2005
- Cummins, Allocation of Capital in the Insurance Industry, 2000
- Denault, Coherent Allocation of Risk Capital, 2001
- Gisler, Vorlesung „Nicht-Leben Versicherungsmathematik“, SS 2006
- Mack, Vorlesung „Schadenversicherungsmathematik“, WS 2008/09
- Mandl, Spieltheoritische Verfahren der Kapitalallokation im Versicherungsunternehmen, 2004
- Schmidli, Lecture notes on „Risk Theory“, SS 2007
- Schradin, Risikoadäquate Kapitalallokation im Versicherungskonzern, 2000
- SwissRe, Einführung in die HUK-Tarifierung, 2000
- Tillmann, Allokation von Risikokapital im Versicherungsgeschäft (I & II), 2006
- Wolf, „Risikomaße“ (Deutsche Aktuar-Akademie GmbH), 2009