Stochastische Risikoaggregation: Begründbare Modelle für die Praxis

Christoph Hummel

SAV Mitgliederversammlung
Arbeitsgruppe AFIR, 6. September 2013

1. Abhängigkeiten in Kapitalmodellen

2. Mehrfache Abhängigkeiten

3. Maßgeschneiderte Abhängigkeitsmodelle

4. Anwendungen

Solvency II Calibration Paper: Advise to consider tail dependencies

SECQUAERO

3.1255 However, where such a simplifying assumption cannot be made – for example, where there is tail-dependency between the risks or where the shape of the marginal risk distributions is significantly different from the normal distribution - the use of linear correlations may not be adequate for the purpose of minimising the aggregation error. In these cases, it may be necessary to consider other dependence concepts for deriving the correlation parameters in the standard formula.

3.1256 For example, in this case it may be more adequate to derive the standard formula correlation parameter for two risks X and Y as the coefficient of (upper) tail dependence of X any Y, which is defined as:[117]

$$\rho = \lim_{\alpha \to 1-} P\left(Y > F_Y^{-1}(\alpha) \,\middle|\, X > F_X^{-1}(\alpha)\right),$$

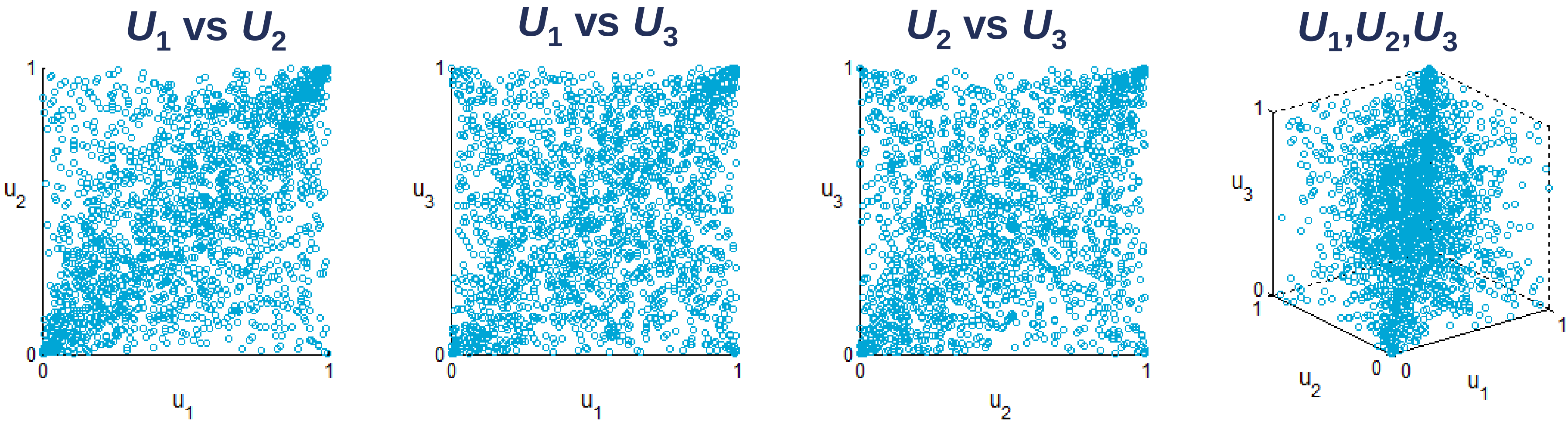
where F_X and F_Y are the distribution functions of X and Y, respectively. Note that this coefficient measures the asymptotic degree of dependence in the "tail" of the risk distributions of X and Y, i.e. the likelihood of simultaneous occurrences of extreme events in both risks.

Source: CEIOPS, Solvency II Calibration Paper, 15. April 2010, § 3.1256

Abhängigkeitsmodelle mit Copulas

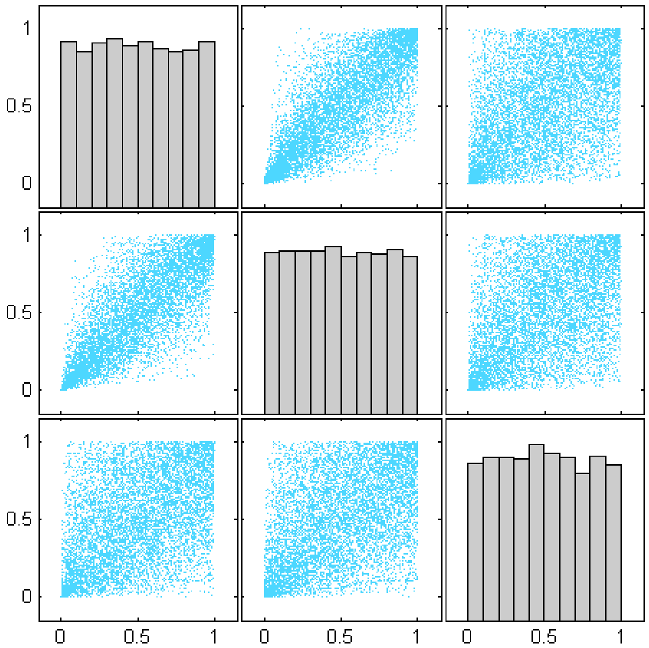
- F_i CDF zum Risikofaktor X_i
- Zielvariable ist eine Funktion $V(X_1, \ldots, X_n)$
- Uniforme Zufallsvariable U_i mit $X_i = F_i^{-1}(U_i)$ als Rangordnung von X_i
- Copula = gemeinsame Verteilung der U_i

- Darstellung einer 3-dim Copula durch Stichproben von (U_1, U_2, U_3):



Gebrauch von Copulas in internen Modellen

- Dezentrale Modellierung der $X_1, \dots, X_n$ und Bestimmung ihrer multivariaten Verteilung durch Wahl einer Copula
  - In der Praxis: $n > 2$



- Gängige Copulas
  - Clayton, Gumbel, Gauß,...
  - Bestimmt durch Rang-Korrelationen oder Tail-Abhängigkeiten der Paare (X_i, X_j)

- Simulationsalgorithmen
  - Simuliere eine Copula (mit abhängigen Randverteilungen)
  - Wende die Inversen der Verteilungsfunktionen der Risikofaktoren auf die eindimensionalen Randverteilungen der Copula an
  - Man erhält eine gemeinsame (abhängige) Stichprobe der Risikofaktoren

1. Abhängigkeiten in Kapitalmodellen

2. Mehrfache Abhängigkeiten

3. Maßgeschneiderte Abhängigkeitsmodelle

4. Anwendungen

Der Fluch der Dimension: Fallbeispiel

SECQUAERO

1. Bernoulli-Variablen B_i für *Gewinn / Verlust* eines Segments $i = 1, \dots, n$.
   - $2^n - 1$ Freiheitsgrade bei der Wahl der multivariaten Verteilung von $(B_1, \dots, B_n)$
2. Gebe die n Randverteilung (RV) der B_i vor
   - Es bleiben $2^n - 1 - n$ Freiheitsgrade
3. Gebe alle Korrelationen $\mathrm{corr}(B_i, B_j)$ vor
   - Es bleiben $2^n - 1 - {}^1/_2\, n - {}^1/_2\, n^2$ Freiheitsgrade übrig

Freiheitsgrade

Dimension n	Keine Vorgabe	Vorgabe RV	Vorgabe RV & Korr.
2	3	1	-
3	7	4	1
4	15	11	5
5	31	26	16
6	63	57	42
⋮	⋮	⋮	⋮
16	65'535	65'519	65'399

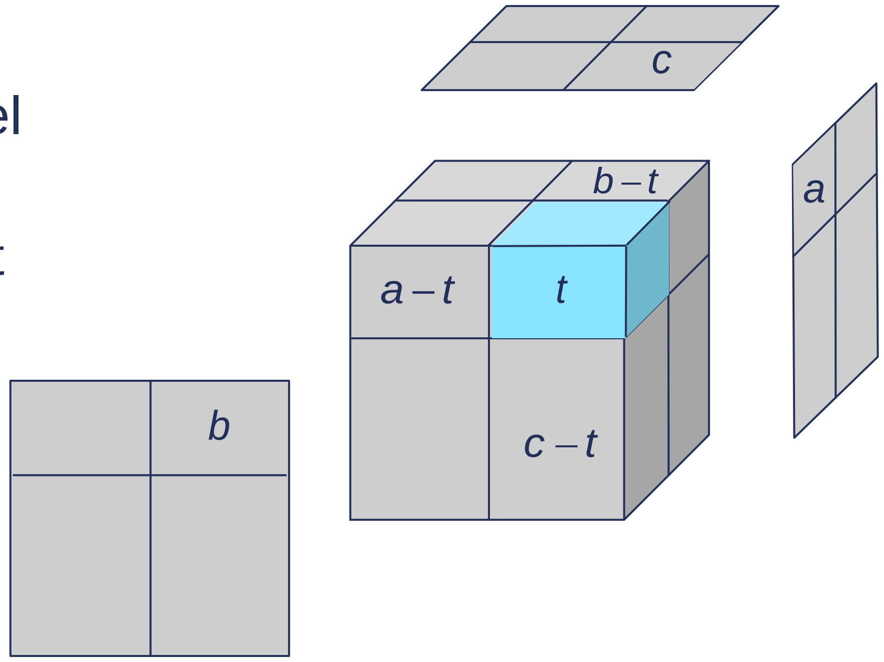
- Wahl einer gängigen Copula legt die restlichen Parameter implizit fest

➔ Wie sensitiv ist das Gesamtrisiko bzgl. der restlichen Parameter?

➔ Was sind die impliziten Annahmen und wie werden sie gerechtfertigt?

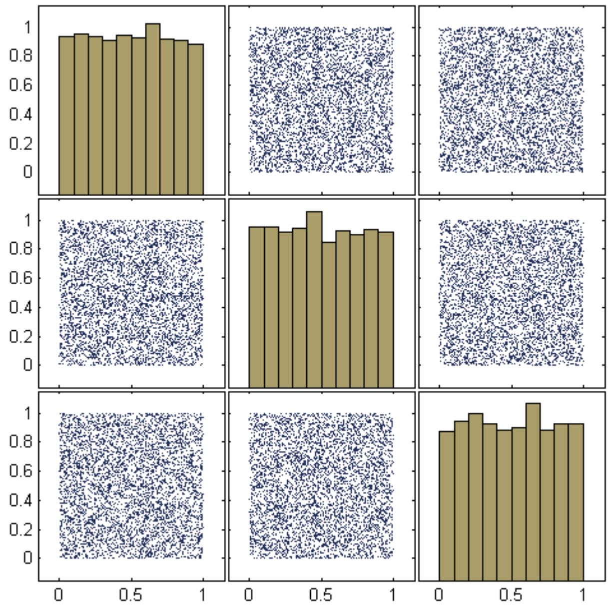
Mehrfache Abhängigkeiten: Veranschaulichung für 3 Faktoren

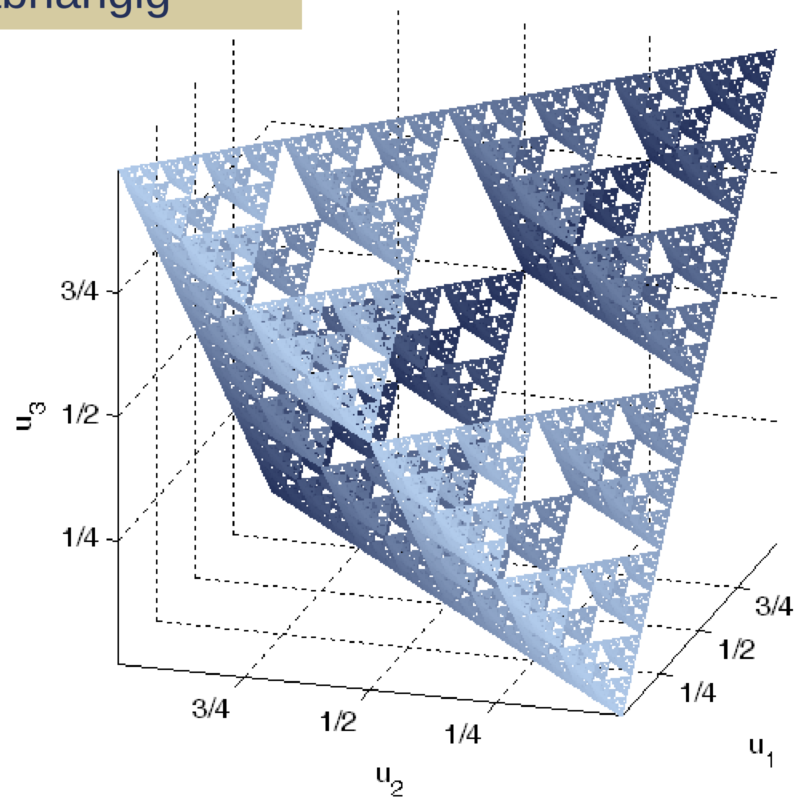
- W'keiten a, b, c sind durch paarweise Abhängigkeiten der 3 Faktoren festgelegt. Sie sind Bildmaße ihrer 3-dim Copula unter den Projektionen auf die Seitenflächen.
- W'keit t ist ein freier Parameter
- Wenn in der zugehörigen Schachtel alle 3 Risikofaktoren ungünstige Realisierungen aufweisen, dann ist t der wesentliche Parameter
- Bei klassischen Copulamodellen, parametrisiert durch paarweise Abhängigkeiten, wird t implizit durch die gewählte Copulafamilie festgelegt.



Beispiel: Paarweise Abhängigkeiten sagen wenig aus

Paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig



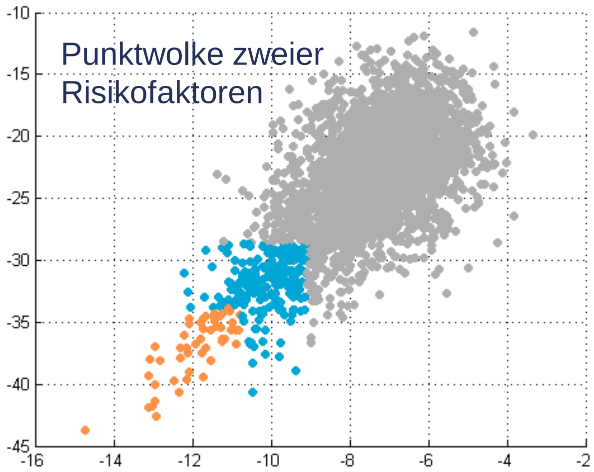


Tail-Abhängigkeiten in Anzahl & Stärke

Unter der Annahme einer realisierbaren Diversifikation wird bei der Aggregation vieler Zufallsvariablen das Ende der Verteilung, grob gesprochen, aus zwei Arten Szenarien bestehen:

- Sehr ungünstige Realisierungen weniger Risikofaktoren

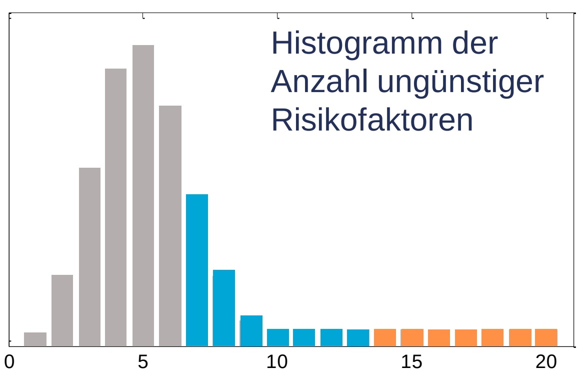
➔ Tail-Abhängigkeit in der *Stärke der Auslenkung* der Risikofaktoren



Wenn z.B. zwei gewählte Faktoren **ungünstig** sind, mit welcher W‘keit sind diese **sehr ungünstig**?

- Moderat ungünstige Realisationen vieler Risikofaktoren

➔ Tail-Abhängigkeit in der *Anzahl ungünstiger Realisierungen* der Risikofaktoren



Wenn z.B. **einige** Faktoren ungünstig sind, mit welcher W‘keit sind es dann **mehrere** ungünstig?

1. Abhängigkeiten in Kapitalmodellen

2. Mehrfache Abhängigkeiten

3. Maßgeschneiderte Abhängigkeitsmodelle

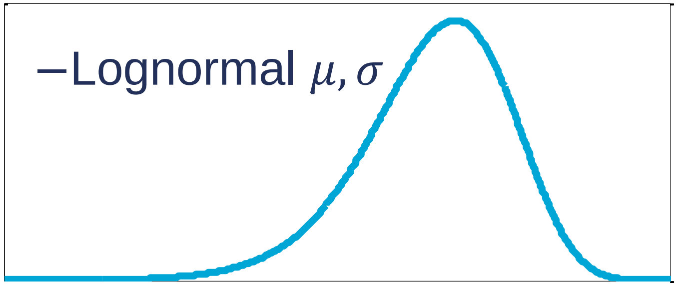
4. Anwendungen

Abwesenheit von Daten mit Fokus auf den Tail? Zwei Ansätze der Modellierung...

Parametrischer Ansatz

- Begründbare Wahl einer parametrischen Verteilungsfamilie
  - Erfahrung aus ähnlichen Sparten mit Daten
  - Extremwerttheorie
- Experte setzt Parameter

➔ Implizite & explizite Annahmen

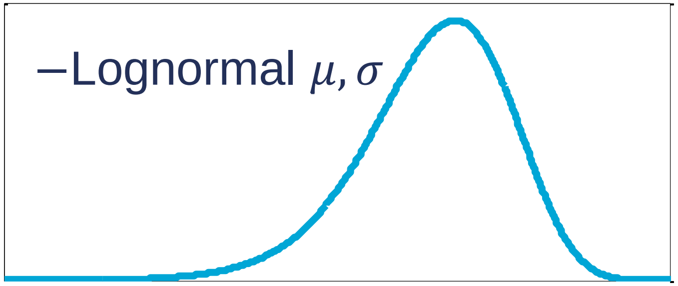


Abwesenheit von Daten mit Fokus auf den Tail? Zwei Ansätze der Modellierung...

Parametrischer Ansatz

- Begründbare Wahl einer parametrischen Verteilungsfamilie
  - Erfahrung aus ähnlichen Sparten mit Daten
  - Extremwerttheorie
- Experte setzt Parameter

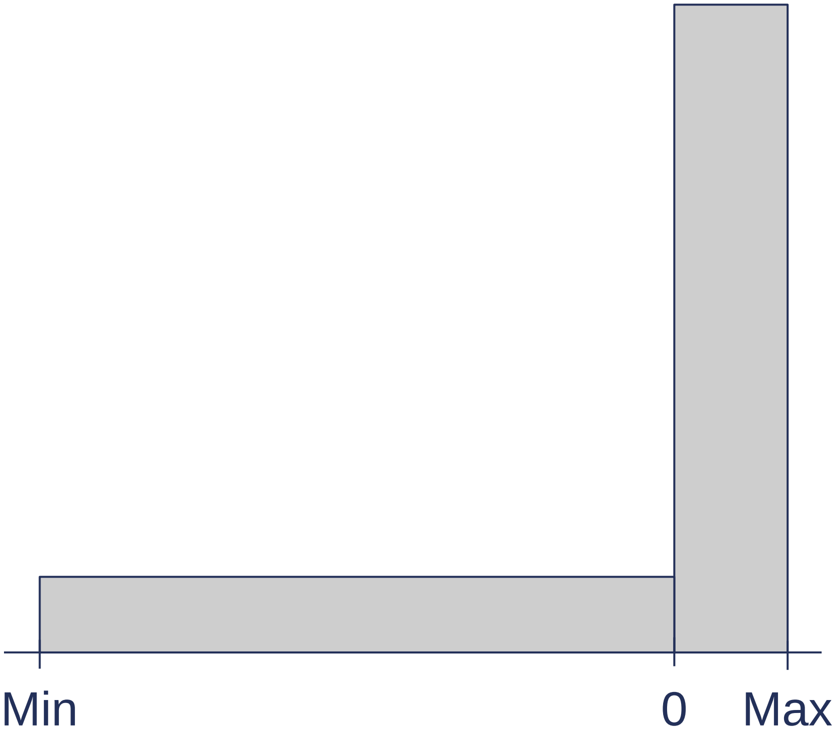
➔ Implizite & explizite Annahmen



Iteratives Verfeinern

- Experte 1 setzt max. Gewinn / Verlust & W‘keit

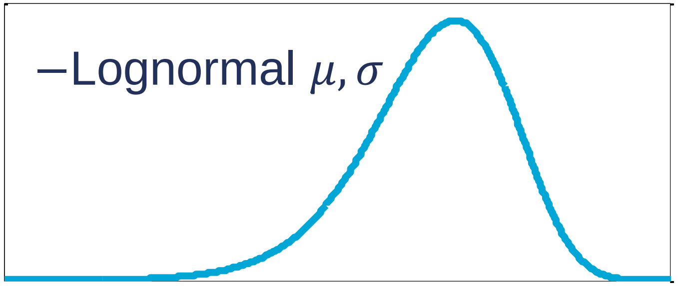
$P(\text{Verlust})$



Abwesenheit von Daten mit Fokus auf den Tail? Zwei Ansätze der Modellierung...

Parametrischer Ansatz

- Begründbare Wahl einer parametrischen Verteilungsfamilie
  - Erfahrung aus ähnlichen Sparten mit Daten
  - Extremwerttheorie
- Experte setzt Parameter
- ➔ Implizite & explizite Annahmen

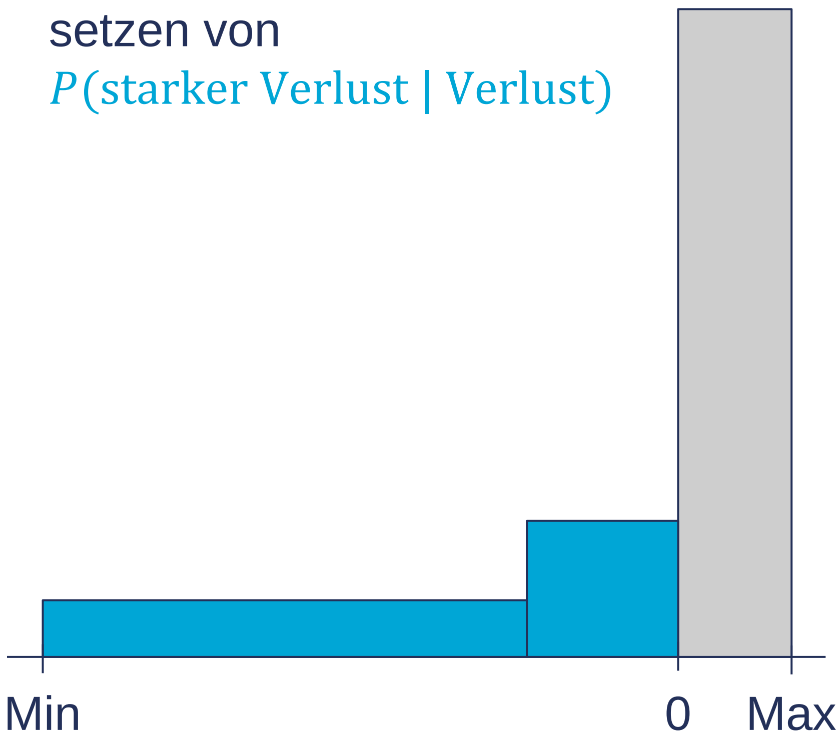


Iteratives Verfeinern

- Experte 1 setzt max. Gewinn / Verlust & W'keit

  $P(\text{Verlust})$
- Experte 2 verfeinert *Verlust* durch setzen von

  $P(\text{starker Verlust} \mid \text{Verlust})$

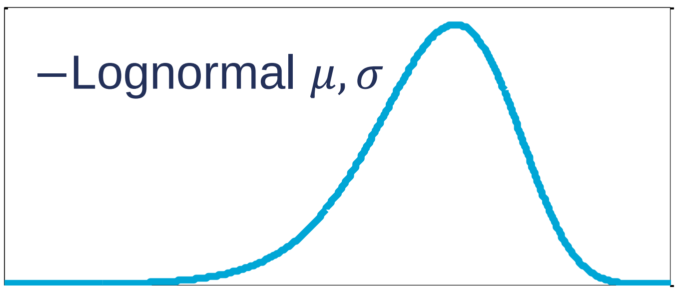


Abwesenheit von Daten mit Fokus auf den Tail? Zwei Ansätze der Modellierung...

Parametrischer Ansatz

- Begründbare Wahl einer parametrischen Verteilungsfamilie
  - Erfahrung aus ähnlichen Sparten mit Daten
  - Extremwerttheorie
- Experte setzt Parameter

➔ Implizite & explizite Annahmen



Iteratives Verfeinern

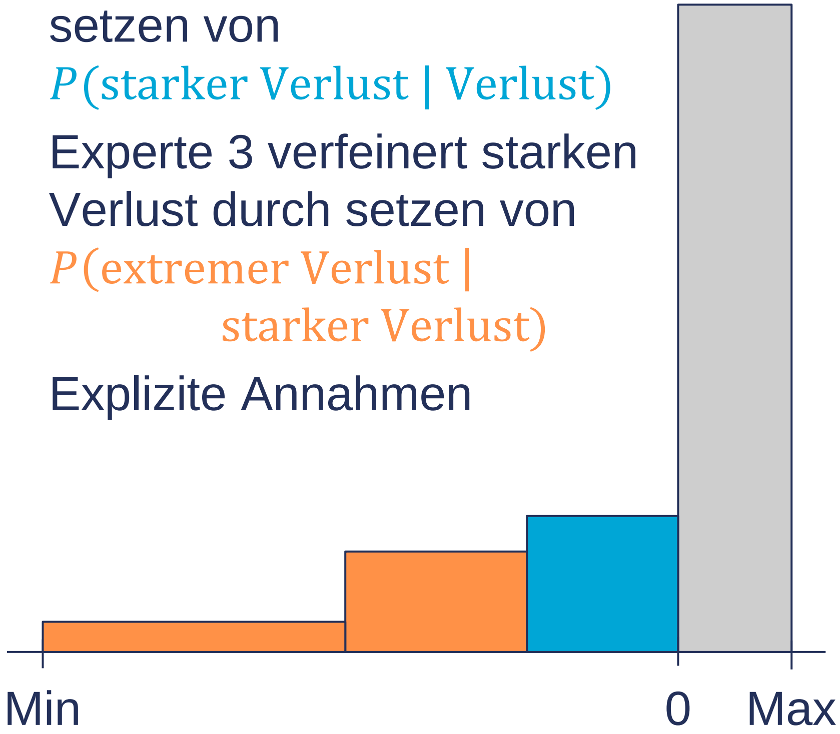
- Experte 1 setzt max. Gewinn / Verlust & W‘keit

  $P(\text{Verlust})$
- Experte 2 verfeinert *Verlust* durch setzen von

  $P(\text{starker Verlust} \mid \text{Verlust})$
- Experte 3 verfeinert starken Verlust durch setzen von

  $P(\text{extremer Verlust} \mid \text{starker Verlust})$

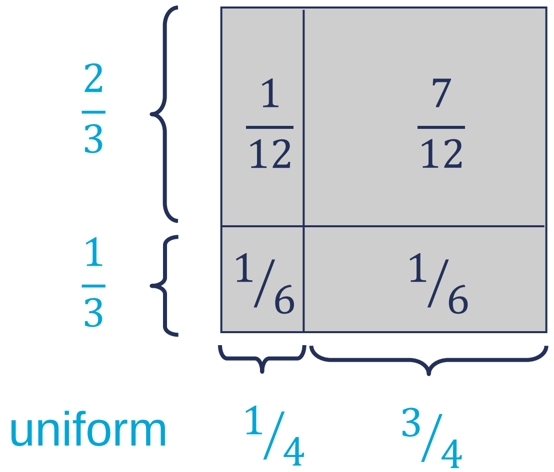
➔ Explizite Annahmen

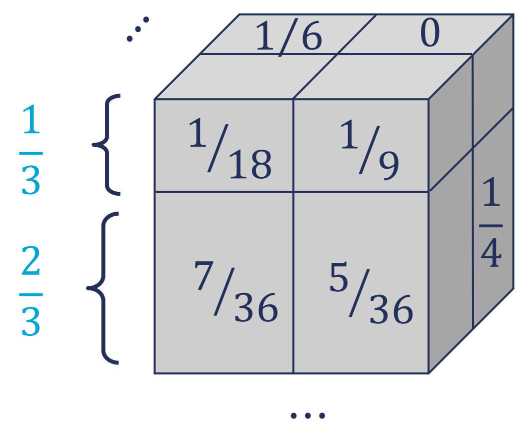


Bernoulli-Copulas

- Zerlege jede Seite von $[0,1]^r$ in Dimension r in zwei Intervalle
  - „günstige“ & „ungünstige“ Perzentile
- Erhalte Zerlegung des Einheitswürfels in 2^r viele Schachteln
- Jede Schachtel erhält uniformes Maß, so dass insgesamt ein Copula entsteht
  - Copula-Bedingung ist durch $r + 1$ lineare Gleichungen gegeben
  - Nebenbedingung: Schachtelmaße ≥ 0
- 1-1 Korrespondenz mit den multivariaten Bernoulli-Verteilungen

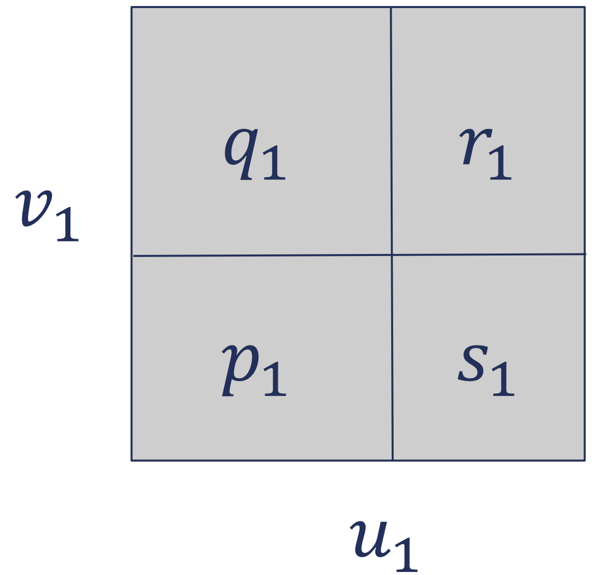
- Beispiele für r = 2 und 3





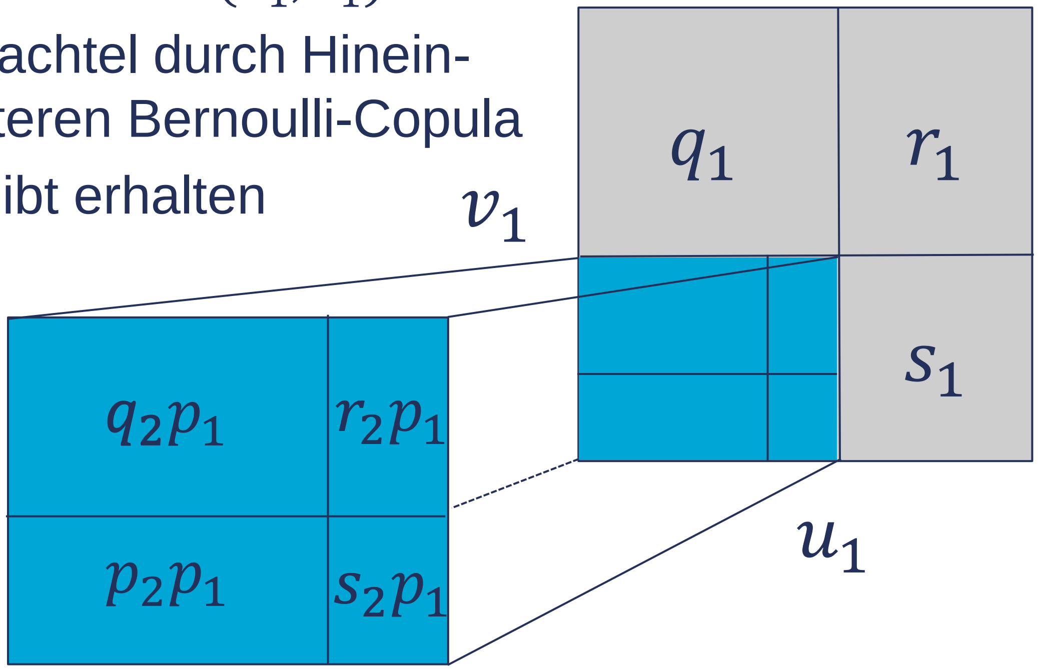
Verfeinern der Bernoulli Copula durch Verschachteln

- 2-dim Bernoulli Copula mit W'keiten p_1, q_1, r_1, s_1 und Zerlegung der Seiten durch (u_1, v_1)



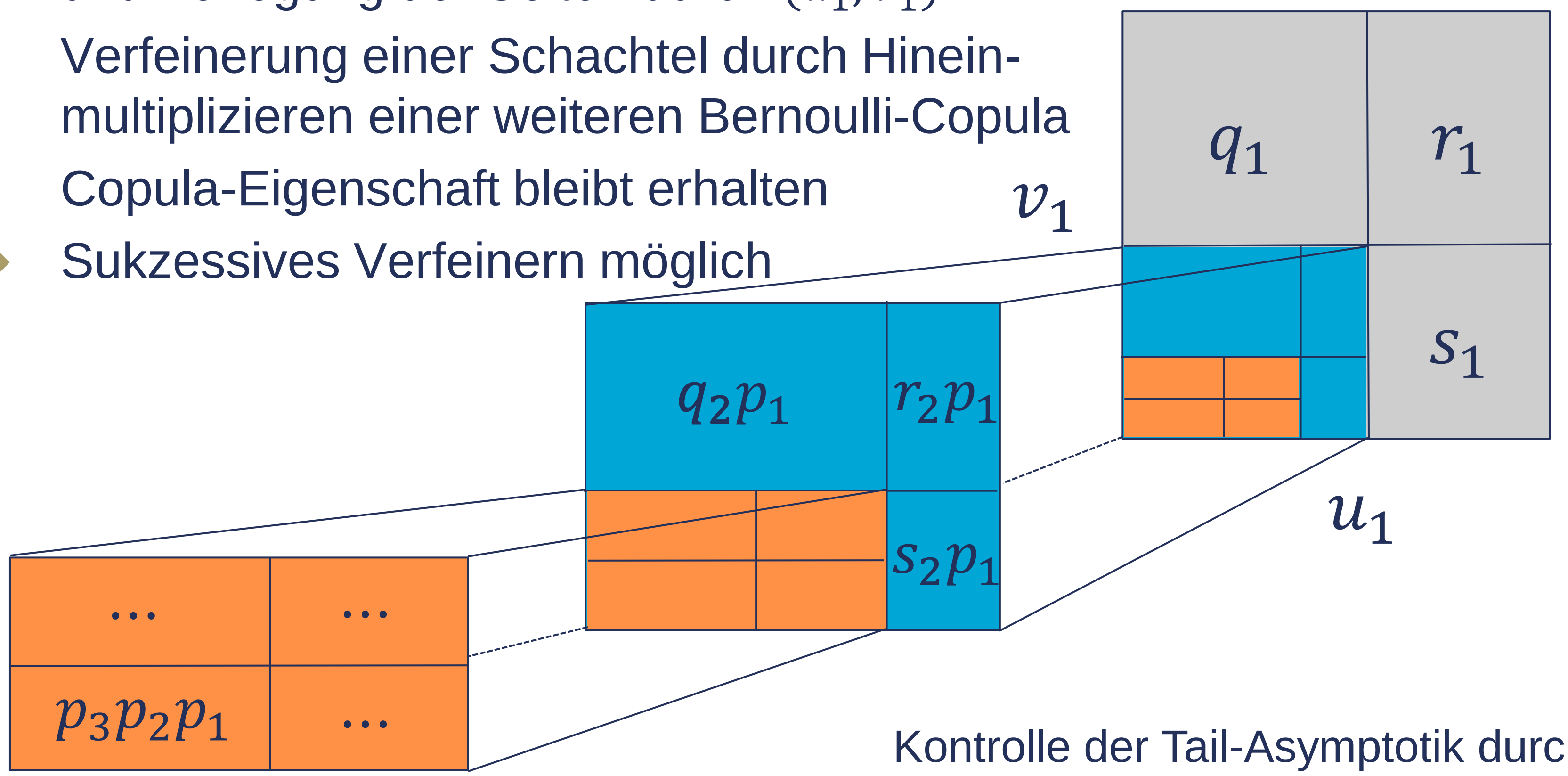
Verfeinern der Bernoulli Copula durch Verschachteln

- 2-dim Bernoulli Copula mit W'keiten p_1, q_1, r_1, s_1 und Zerlegung der Seiten durch (u_1, v_1)
- Verfeinerung einer Schachtel durch Hinein-multiplizieren einer weiteren Bernoulli-Copula
- Copula-Eigenschaft bleibt erhalten



Verfeinern der Bernoulli Copula durch Verschachteln

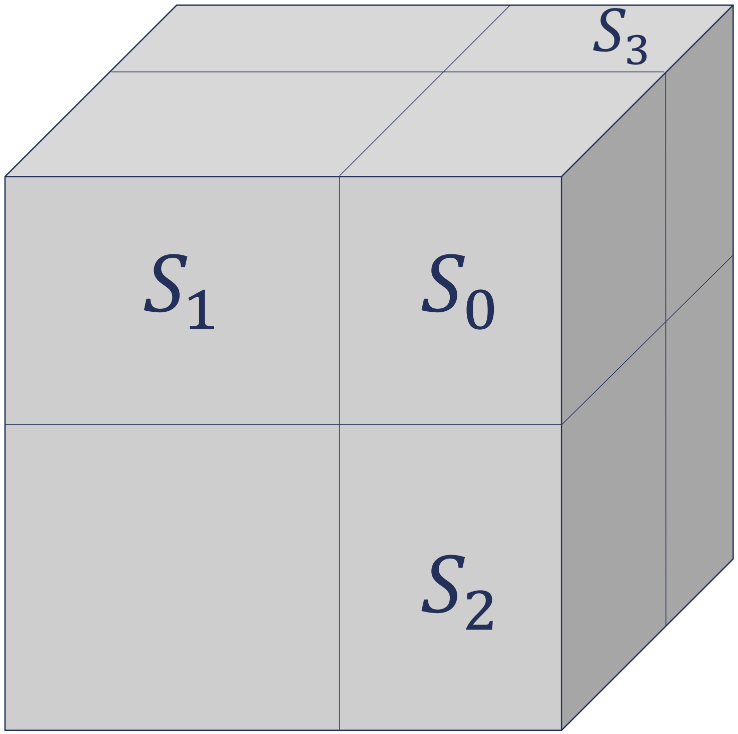
- 2-dim Bernoulli Copula mit W'keiten p_1, q_1, r_1, s_1 und Zerlegung der Seiten durch (u_1, v_1)
- Verfeinerung einer Schachtel durch Hineinmultiplizieren einer weiteren Bernoulli-Copula
- Copula-Eigenschaft bleibt erhalten
- → Sukzessives Verfeinern möglich



Kontrolle der Tail-Asymptotik durch geschickte Wahl der Folgen $(u_k, v_k, p_k)_{k=1,2,3,\dots}$

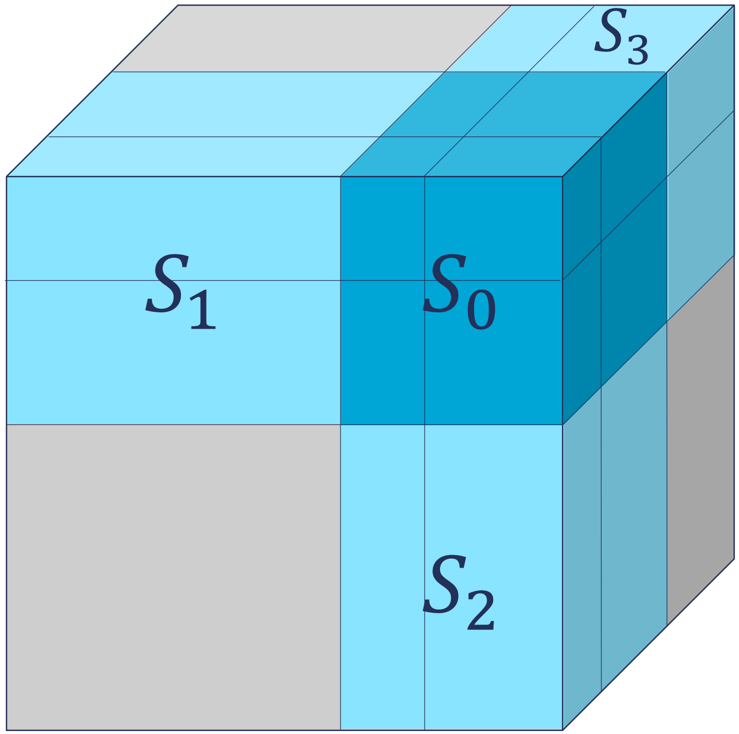
Verschachtelung der Tails in höheren Dimensionen

- Bernoulli-Copula BC_1
- Tail- Schachteln S_0, S_1, S_2, S_3
  - S_0: *alle ungünstig*
  - S_1, S_2, S_3: je *zwei ungünstig*



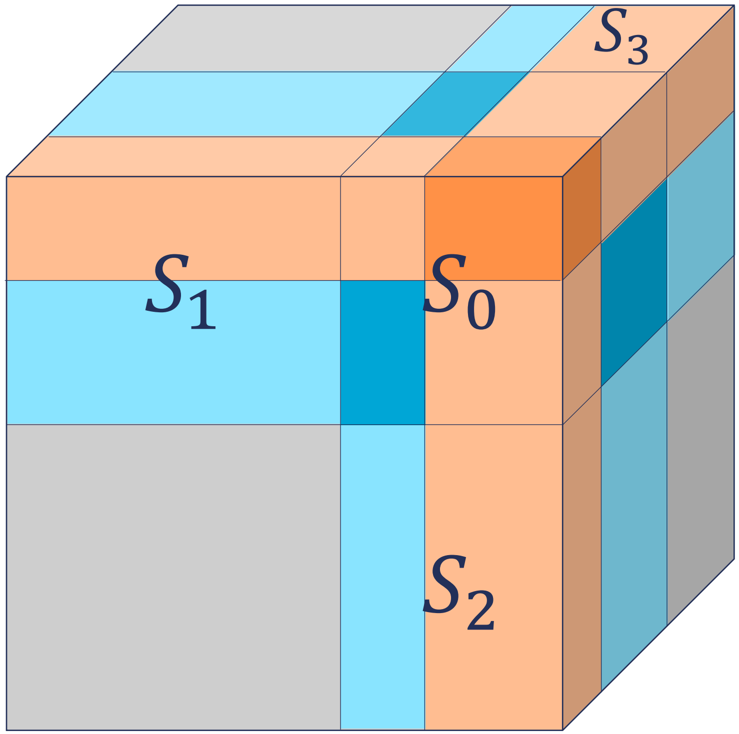
Verschachtelung der Tails in höheren Dimensionen

- Bernoulli-Copula BC_1
- Tail- Schachteln S_0, S_1, S_2, S_3
  - S_0: *alle ungünstig*
  - S_1, S_2, S_3: je *zwei ungünstig*
- Verschachtelung von BC_2 in jede Tail-Schachtel
  - Verfeinere nur die ungünstigen Dimensionen



Verschachtelung der Tails in höheren Dimensionen

- Bernoulli-Copula BC_1
- Tail- Schachteln S_0, S_1, S_2, S_3
  - S_0: *alle ungünstig*
  - S_1, S_2, S_3: je *zwei ungünstig*
- Verschachtelung von BC_2 in jede Tail-Schachtel
  - Verfeinere nur die ungünstigen Dimensionen
- Analoge Verschachtelung von BC_3 in jede Tail-Schachtel
- …und so weiter



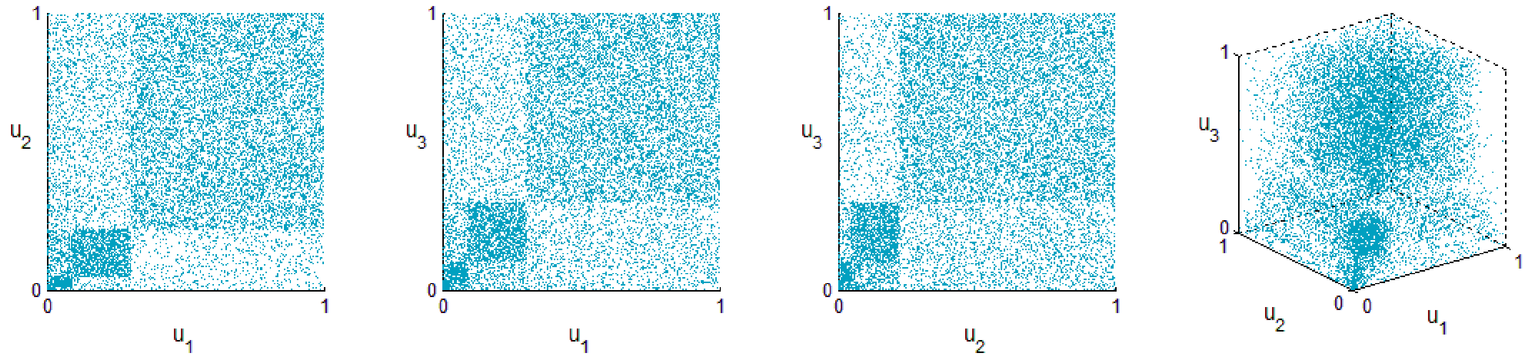
Eigenschaften: Tail-Verschachtelung kommutiert mit Projektion auf die Seiten des Würfels.

Folgerung: Bei der Konstruktion einer Copula für Risiken $X_1, \dots, X_n$ kann die Tail-Asymptotik für alle Teilfamilien F von $X_1, \dots, X_n$ flexibel* kontrolliert werden.

*Monotonie-Bedingung an die Asymptotik von Teilfamilien F und F' mit $F \subset F'$.

Weitere Eigenschaften von Schachtelcopulas

- Einfache und schnelle Monte-Carlo-Algorithmen



- Stückweise konstante Dichten im Inneren, die in Tail-Richtungen nach unendlich gehen können
- Ermöglichen Einblick in vielfältige (Tail-)Abhängigkeitsstrukturen

1. Abhängigkeiten in Kapitalmodellen

2. Mehrfache Abhängigkeiten

3. Maßgeschneiderte Abhängigkeitsmodelle

4. Anwendungen

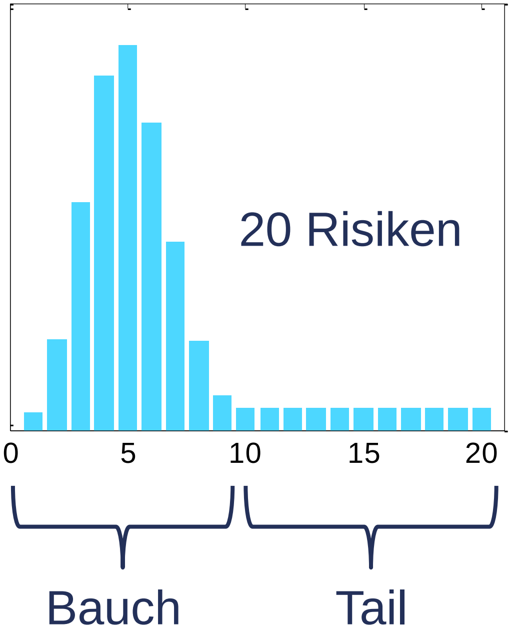
1. Schritt: Bestimme Tail-Abhängigkeit in der Anzahl ungünstiger Realisierungen

SECQUAERO

Wie viele und dann welche Risikofaktoren verlaufen mit welcher W'keit gleichzeitig ungünstig?

- Definiere zunächst *ungünstig*
  - Bspw. W'keit 20%
- „Frequenzproblem“ (wie viele)
  - → I.a. multivariates Bernoulli-Modell
  - → Symmetrie-Annahmen in höheren Dimensionen unerlässlich; wenn etwa Austauschbarkeit, dann Frequenzmodell
- Anhaltspunkte für Diversifikation
  - Empirische Daten
  - Geographie, Zedenten,…
- Systemische Effekte
  - Rechtliche Auswirkungen
  - Tarifierung

- Parameter sind intuitiv und im Prinzip zugänglich für Experten, die mit den Risiken vertraut sind



2. Schritt: Bestimme Tail-Abhängigkeit in der Stärke der Auslenkungen der Risikofaktoren

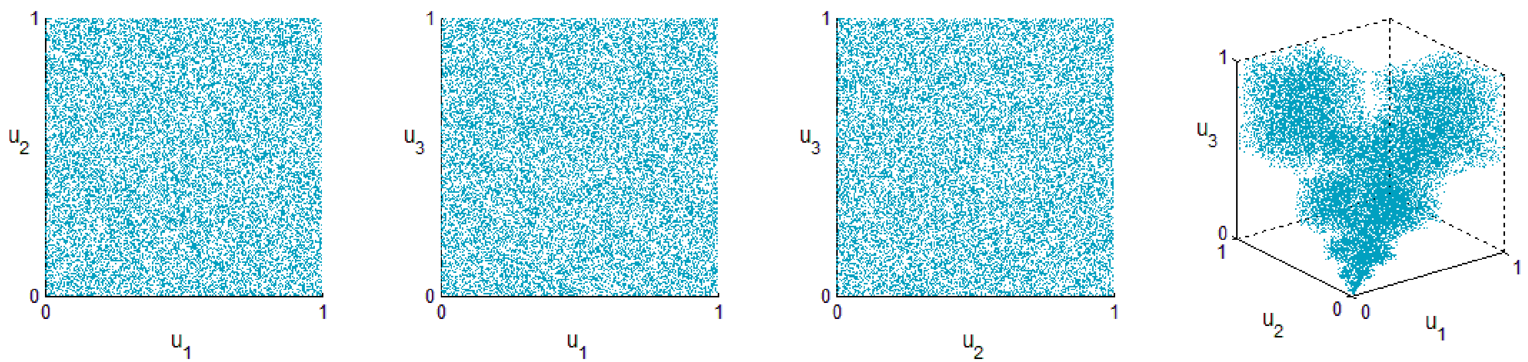
SECQUAERO

Gegeben eine Teilfamilie der Risikofaktoren verlaufe ungünstig, mit welcher W‘keit verläuft die gesamte Teilfamilie sehr ungünstig?

- Definiere *sehr ungünstig*
  - Bspw. W‘keit 5%
- Zur Beantwortung der Fragen sind i.A. keine Daten vorhanden
  - → Expertenwissen
  - → Frage ist zumindest zugänglich für Experten, die mit den Risiken vertraut sind
- I.a. werden wir nur Antworten zu einem Teil der Fragen bekommen. Beantworte übrigen Fragen etwa durch
  - → Symmetrieannahmen
  - → Optimierung
- Setze Antworten durch Verschachtelung der Tails um
- Bei Bedarf weitere Verschachtelung
- Definiere dazu „extrem ungünstig“ und verfahre analog
- Bemerkung: Fokus nur auf Verfeinern der Tails; ausserhalb der Tails ist das grobe Modell gut genug um das Gesamtrisiko zu ermitteln.

Fallstudie: Sensitivität des Gesamtrisikos auf mehrfache Abhängigkeiten

- Betrachten wir Bernoulli-Copulas, in denen alle Korrelationen null sind
  - All diese Copulas sind dann sogar paarweise unabhängig
  - Wir spielen mit den zusätzlichen Freiheitsgraden
- Wir verschachteln solche Copulas und erhalten ab Dimension drei *Schachtelcopulas*, die paarweise unabhängig sind, aber Tail-Abhängigkeiten in Anzahl und Auslenkung haben, z.B.:

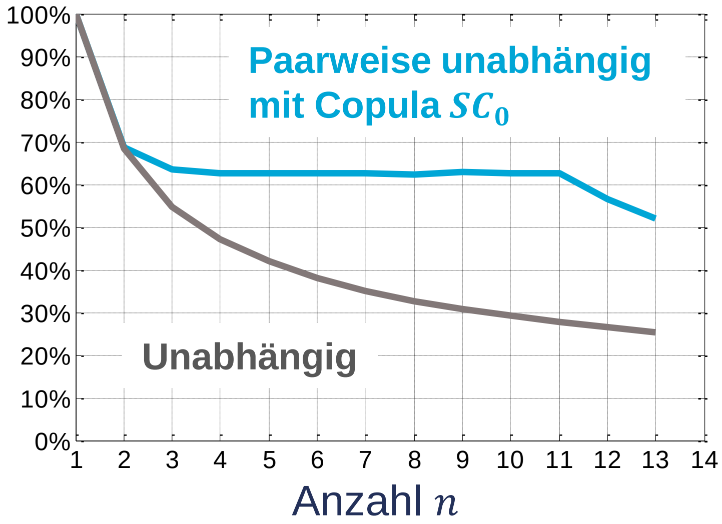


- Risikoaggregation: Wie sensitiv ist das Gesamtrisiko in Bezug auf die zusätzlichen Freiheitsgrade?

Fallstudie: Sensitivität des Gesamtrisikos auf mehrfache Abhängigkeiten

- Faktoren $X_1, \dots, X_n$ seien $-\,\mathrm{logn}(1{,}0.1)$ und identisch verteilt
- Suche Bernoulli-Copula BC_0 mit
  - Ungünstig bei 10%-Perzentil paarweise Unabhängigkeit
  - Maximaler Tail-Abhängigkeit in der Anzahl
- Verschachtle BC_0 in sich selbst
  - erhalte paarweise unabhängige Schachtelcopula SC_0 mit Tail-Abhängigkeit in der Stärke der Auslenkung
- Vergleiche das Gesamtrisiko von $\sum_i X_i$ unter Aggregation mit SC_0 und der unabhängigen Copua

- Gesamtrisiko ($\mathrm{TVaR}_{1\%}$) in % der Summer der Einzelrisiken

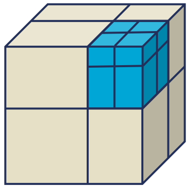


- Für eine genauere Abschätzung des Gesamtrisikos sind für $n > 3$ zusätzliche Annahmen zu Tail-Abhängigkeit in Anzahl und Auslenkung erforderlich.

Fazit

- Gängige Abhängigkeitsmodelle werden oft über paarweise Abhängigkeiten der Risikofaktoren bestimmt; Annahmen über mehrfachen Abhängigkeiten werden implizit getroffen.
- Schachtelcopulas bieten die Möglichkeit, maßgeschneiderte Abhängigeitsmodelle zu konstruieren, die Tail-Abhängigkeiten sowohl in der Anzahl als auch Stärke der Auslenkung explizit berücksichtigen.
- Parameter für Schachtelcopulas sind intuitiv und für Experten zugänglich.
- Schachtelcopulas können im Rahmen der internen Modellierung sowohl zur Kalibrierung als auch zur Validierung von stochastischen Abhängigkeitsmodellen eingesetzt werden.

Fragen?



Christoph Hummel

Head of Non-Life Modelling

christoph.hummel@secquaero.com

Secquaero Advisors

Central 2

8001 Zürich

Anhang

Formale Definition von Tailabhängigkeit in der Stärke der Auslenkung

n-dim Copula C für $X_1, \dots, X_n$ und C_F zugehörige Copula für $(X_i)_{i \in F}$, $F \subset \{1,2,\dots,n\}$

Paarweise Tailabhängigkeit

- $F = \{i, j\}$ mit zwei Elementen
- $\lambda_F = \liminf_{s \to 0} \frac{C_F(s,s)}{s}$
- $C_F(s,s) \sim \lambda_F \cdot s$ für $s \to 0$
- Tail beschrieben durch $(\lambda_F)_{|F|=2}$

Siehe z.B. A. McNeil et al, Quantitative Methods in Risk Management, Princeton University Press, 2005

Mehrfache Tailabhängigkeit

- F mit zwei oder mehr Elementen
- $b_F = \inf\left\{ \tau \,\middle|\, \liminf_{s \to 0} \frac{C_F(s,\dots,s)}{s^\tau} = \infty \right\}$
- $a_F = \liminf_{s \to 0} \frac{C_F(s,\dots,s)}{s^{b_F}}$
- $C_F(s, \dots, s) \sim a_F \cdot s^{b_F}$ für $s \to 0$
- Tailcharakteristik $(a_F, b_F)_{|F| \geq 2}$
- **Definition**: $(X_i)_{i \in F}$ haben positive Tailabhängigkeit falls $b_F < |F|$.

Copulas mit vorgegebener Tailcharakteristik

SECQUAERO

Tailcharakteristik

- Es gibt notwendige Voraussetzungen an die Tailcharakteristik $(a_F, b_F)_{|F|\geq 2}$, z.B.
  1. Monotonie der Wahrscheinlichkeiten: $F \subset F' \Rightarrow b_F \leq b_{F'}$
  2. Falls alle $b_F = 1$ müssen wegen der Monotonie und Positivität der W'keiten die a_F gewisse lineare Ungleichungen erfüllen.

Satz

Gegeben $(a_F, b_F)_{|F|\geq 2}$ so dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i. Für alle F ist $a_F > 0, b_F > 1$ und b_F strikt monoton in F
ii. Für alle F ist $b_F = 1$ und die a_F erfüllen die notwendige Voraussetzung 2.)

Dann gibt es eine Schachtelcopula mit Tailcharkteristik $(a_F, b_F)_{|F|\geq 2}$.